Wymagania do egzaminu dyplomowego

dla studentów studiów II stopnia[1]

zatwierdzone przez Radę Instytutu Matematyki dnia 12 czerwca 2014r.

Na egzaminie dyplomowym student powinien wykazać się znajomością i dobrym rozumieniem podstawowych pojęć matematycznych i zagadnień z dydaktyki matematyki. Ponadto powinien dobrze operować językiem matematycznym, umieć przedstawić syntetycznie kluczowe problemy matematyki wyższej, a także widzieć związki matematyki wyższej z matematyką elementarną.

Każdy student powinien być przygotowany do odpowiedzi na wszystkie zagadnienia działu I oraz wszystkie zagadnienia z wybranego przez siebie i uzgodnionego z promotorem jednego z działów od II do X. Na wniosek studenta i promotora Dyrektor Instytutu może wyznaczyć studentowi indywidualne pensum do egzaminu magisterskiego, które zastąpi wybór jednego z działów II-X (dział I pozostaje obowiązkowy).

I. Pojęcia i wiadomości podstawowe

1. Pojęcia teorii aksjomatycznej i jej modelu.
2. Elementarne pojęcia rachunku zdań.
3. Aksjomatyczny system teorii mnogości i równoważne formy pewnika wyboru.
4. Liczby kardynalne i porządkowe.
5. Arytmetyka liczb kardynalnych.
6. Relacje równoważnościowe i porządkowe. Definiowanie pojęć matematycznych za pomocą relacji równoważnościowych. Uporządkowanie podstawowych zbiorów liczbowych.
7. Systemy aksjomatyczne arytmetyki liczb naturalnych. Konstrukcja zbioru liczb naturalnych w teorii mnogości. Konstrukcje podstawowych struktur liczbowych (liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste i zespolone).
8. Geometria krzywych. Krzywe regularne, długość krzywej, trójścian Freneta.
9. Geometria powierzchni. Płaszczyzna styczna, wektor normalny.
10. Definicje i modele podstawowych struktur algebraicznych, struktury ilorazowe.
11. Homomorfizmy struktur algebraicznych. Podstawowe własności oraz przykłady w poszczególnych strukturach.
12. Przestrzeń wektorowa, jej baza i wymiar; podprzestrzeń generowana przez zbiór; przykłady.
13. Algebra macierzy. Wyznacznik i rząd macierzy. Układy równań liniowych.
14. Układy współrzędnych w przestrzeniach afinicznych i euklidesowych. Równania prostych i płaszczyzn.
15. Przekształcenia liniowe i afiniczne. Macierz przekształcenia liniowego.
16. Krzywe i powierzchnie stopnia 2.
17. Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa. Niezależność zdarzeń. Przykłady przestrzeni probabilistycznych.
18. Zmienne losowe jedno- i dwuwymiarowe i generowane przez nie przestrzenie probabilistyczne na prostej i na płaszczyźnie. Niezależność zmiennych losowych. Dystrybuanta. Wartość oczekiwana i wariancja.
19. Różne rodzaje zbieżności. Prawo wielkich liczb Bernoulliego. Twierdzenia graniczne.
20. Pojęcie granicy ciągu. Różne definicje granicy funkcji i związki zachodzące między nimi. Podstawowe własności granic ciągów oraz funkcji.
21. Szeregi liczbowe, rodzaje i kryteria ich zbieżności. Szeregi potęgowe.

[1] Dotyczy cyklu rozpoczętego 1 października 2013 roku

22. Pochodna funkcji jednej zmiennej i jej własności. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania monotoniczności i wypukłości funkcji oraz wyznaczania ekstremów lokalnych. Twierdzenia o wartości średniej i ich interpretacja geometryczna. Wzór Taylora.
23. Różniczki funkcji wielu zmiennych, pochodne cząstkowe, pochodna kierunkowa, ich własności i związki zachodzące między nimi.
24. Pochodna funkcji zespolonej. Zespolone szeregi potęgowe. Pojęcie funkcja analitycznej oraz holomorficznej oraz związki zachodzące między nimi.
25. Definicje różnych rodzajów całek (wielokrotnych, krzywoliniowych, powierzchniowych).
26. Miara i jej podstawowe własności. Miara Lebesgue'a, miara Jordana.
27. Różne definicje ciągłości funkcji. Własności funkcji ciągłych.
28. Odwzorowania ciągłe, homeomorfizmy, izometrie.
29. Przestrzenie unormowane jako przykład łączenia struktury topologicznej i liniowej.
30. Przestrzenie Banacha, ich własności.
31. Podstawowe przykłady przestrzeni ciągowych i funkcyjnych.
32. Operatory liniowe i ciągłe, podstawowe własności i przykłady.
33. Dydaktyczne problemy związane z definiowaniem i korzystaniem z definicji, formułowaniem twierdzeń, ich stosowaniem i dowodzeniem.
34. Poziomy i kryteria rozumienia pojęć. Typy rozumowań w nauczaniu matematyki (wnioskowanie empiryczne, intuicyjne i formalne, indukcja, dedukcja, redukcja, rozumowanie nie wprost).

II. Analiza matematyczna

1. Rodzaje zbieżności ciągów i szeregów funkcyjnych i relacje zachodzące między nimi. Własności granic ciągów funkcyjnych.
2. Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Warunki konieczne i wystarczające ich istnienia.
3. Miara zewnętrzna, twierdzenie Caratheodory'ego, miara Lebesgue'a i jej własności.
4. Całka Lebesgue'a, jej własności i związek z całką Riemanna.

III. Analiza zespolona

1. Twierdzenia Liouville'a, zasadnicze twierdzenie algebry.
2. Całki funkcji zespolonych. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego, wzór całkowy Cauchy'ego, ich konsekwencje oraz przykłady zastosowania.

IV. Analiza funkcjonalna

1. Przestrzenie Banacha i Hilberta oraz związki zachodzące między nimi.
2. Operatory i funkcjonały liniowe ciągłe.
3. Przestrzeń operatorów liniowych i ciągłych.
4. Przestrzeń sprzężona.
5. Klasyczne twierdzenia analizy funkcjonalnej: twierdzenie Hahna-Banacha, twierdzenie o operatorze otwartym, zasada jednostajnej ograniczoności.

V. Topologia

1. Różne rodzaje przestrzeni topologicznych (zwarte, spójne, zupełne, ośrodkowe).
2. Aksjomaty oddzielania.
3. Niezmienniki odwzorowań ciągłych, homeomorfizmów oraz izometrii.

VI. Algebra

1. Grupy i pierścienie, dzielniki normalne i ideały, struktury ilorazowe.
2. Element pierwszy i nierozkładalny; pierścień Gaussa, pierścień główny, pierścień Dedekinda.
3. Przywiedlność i nieprzywiedlność wielomianów nad danymi pierścieniami.
4. NWP i NWW. Pierścienie Euklidesa i algorytm Euklidesa.
5. Elementy algebraiczne i elementy przestępne nad ciałem; rozszerzenia algebraiczne, rozszerzenia skończone, rozszerzenie o element algebraiczny.
6. Ciała algebraicznie domknięte. Zasadnicze twierdzenie algebry.
7. Przestrzenie euklidesowe; od iloczynu skalarnego przez normę do metryki; ortogonalność; postać iloczynu skalarnego.
8. Izometrie, własności, reprezentacje, macierze ortogonalne, przykłady.
9. Postacie kanoniczne formy kwadratowej. Własności. Formy kwadratowe dodatnio określone.
10. Macierz przekształcenia liniowego względem danych baz, rząd przekształcenia.

VII. Geometria

1. Parametryzacja naturalna krzywej w $\mathbb{R}^3$ krzywizna, torsja, przykłady.
2. Wektor styczny, normalny i binormalny krzywej. Wzory Freneta.
3. Fundamentalne twierdzenie teorii krzywych.
4. Powierzchnie prostokreślne, definicja i przykłady.
5. Powierzchnie obrotowe, definicja i przykłady.
6. Powierzchnie o stałej krzywiźnie.
7. I forma fundamentalna, pole płata.
8. Operator kształtu.
9. II forma fundamentalna.
10. Krzywizny główne, kierunki główne powierzchni, linie krzywizny. Krzywizna Gaussa, krzywizna średnia.
11. Współczynniki Christoffela.
12. Wzory Codazziego i wzory Gaussa.
13. Fundamentalne twierdzenie teorii powierzchni.

VIII. Rachunek prawdopodobieństwa

1. Przestrzeń probabilistyczna (definicja aksjomatyczna). Ziarnista (dyskretna) przestrzeń probabilistyczna. Przestrzeń probabilistyczna jako model doświadczenia losowego.
2. Przestrzeń probabilistyczna geometryczna i prawdopodobieństwo geometryczne.
3. Szeregi liczbowe i funkcyjne w rachunku prawdopodobieństwa.
4. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej. Momenty zmiennej losowej.
5. Twierdzenia graniczne i przybliżenia. Prawo wielkich liczb Bernoulliego.
6. Podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa i przykłady przestrzeni probabilistycznych o tych rozkładach (rozkład Bernoulliego, Poissona, normalny, Cauchy'ego itd.).
7. Populacja. Cecha. Próba. Statystyka. Estymacja i weryfikacja hipotez – na przykładach adresowanych do szkoły.

IX. Równania różniczkowe

1. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych.
2. Przykłady metod rozwiązywania pewnych typów równań różniczkowych pierwszego i drugiego rzędu.

X. Dydaktyka matematyki

1. Rodzaje zadań matematycznych w różnych koncepcjach nauczania, główne etapy wg. Polyi i przykłady wskazówek heurystycznych w procesie rozwiązywania zadań.
2. Cele nauczania matematyki, rola pojęciowego i algorytmicznego ujęcia matematyki w różnych koncepcjach nauczania.
3. Wykorzystanie technologii informacyjnej w nauczaniu matematyki, przykłady edukacyjnych programów komputerowych.
4. Reprezentacje enaktywne, ikoniczne i symboliczne i ich rola w procesie kształtowania pojęć matematycznych.
5. Specyfika języka szkolnej matematyki, charakterystyczne błędy popełniane przez uczniów i sposoby ich wykorzystywania w procesie kształtowania pojęć.
6. Lokalna dedukcja na lekcjach matematyki.
7. Czynnościowe nauczanie matematyki.
8. Elementy logiki w nauczaniu matematyki.
9. Metodyka nauki o liczbie i działaniach.
10. Metodyka nauki o funkcjach numerycznych i ich wykresach.
11. Metodyka nauki o przekształceniach geometrycznych.
12. Równania i nierówności w matematyce elementarnej.